Topologie et logique

Antoine Beaudet

présentation du 12 novembre 2019, UQAM

1 Motivation

Soit X un espace topologique, et écrivons $\mathcal{O}(X)$ pour l'ensemble des ouverts de X. On remarque que

$$U \cup V = \{x | x \in U \textit{ ou } x \in V\} \quad \text{et} \quad U \cap V = \{x | x \in U \textit{ et } x \in V\}.$$

Peut-on utiliser cette dualité pour encoder des valeurs logiques?

Prenons $1 = \{*\}$ l'espace topologique à un seul point, c'est-à-dire $\mathcal{O}(1) = \{\emptyset, \{*\}\}$. Nous pouvons faire la correspondence suivante:

vrai	$*$
faux	$\emptyset$
et	$\cap$
ou	$\cup$

Il y a toujours une (unique) fonction continue $f : X \to \{*\}$ pour tout espace X, qui envoie tout sur $*$. Sur les ouverts, nous avons alors $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad f^{-1}(*) = X$. De plus, en général une fonction $f : X \to Y$ est continue si et seulement si

$$U \in \mathcal{O}(Y), \quad \text{implique} \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X),$$

de surcroît,

$$U \subset V, \quad \text{implique} \quad f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V),$$

On voit donc que

$$f : X \to Y \quad \text{induit} \quad f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

un morphisme... de quoi? de posets, au moins. C'est-à-dire $\mathcal{O} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Pos}$ est un foncteur contravariant.

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
 * \arrow[ur, mapsto] & \\
 {} \arrow[r, "f^{-1}"] & \vdots \arrow[uu] \\
 \emptyset \arrow[uu] \arrow[dr, mapsto] & \\
 & \emptyset \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

En fait, f^{-1} préserve aussi les unions et intersections; alors la correspondence ci-haut est transportée sur $\{\emptyset, X\}$!

vrai	X
faux	$\emptyset$
u et v	$u \cap v$
u ou v	$u \cup v$

On aimerait maintenant l'étendre à $\mathcal{O}(X)$ au complet. Mais, pauvres mathématiciens classiques que nous sommes, nous ne savons pas comment manipuler des valeurs de vérités autres que "vrai" et "faux"... Armés de notre métaphore d'espace de vérité, nous pouvons regarder comment définir l'union et l'intersection entièrement avec $\mathcal{O}(X)$. L'idée est que $u \cup v$ est *le plus petit* ouvert contenant u et v, alors que $u \cap v$ est *le plus grand* ouvert contenu dans u et v, soit

$$u \cup v = \inf(u, v) \quad \text{et} \quad u \cap v = \sup(u, v)$$

dans $\mathcal{O}(X)$.

2 Digression sur les posets

Pour un catégoricien, un poset n'est qu'une catégorie particulièrement triviale. En effet, nous les définirons directement comme une petite catégorie P telle que

$$P(x, y) \subset 1$$

(une catégorie *enrichie* sur $2 \in \mathbf{Set}$) et où tout isomorphisme est une égalité (c'est une catégorie *squelettique*). Je vous laisse vérifier que les définitions sont équivalentes. On note alors que (1) le maximum de P est l'objet terminal et (2) le minimum de P est l'objet initial. En fait, un objet terminal est un cas particulier du produit:

Définition 2.1. Soit C une catégorie. Un *produit* d'un ensemble $A \subset Ob(C)$ est un objet $\bigwedge A$ munit d'une flèche $p_a : \bigwedge A \to a$ pour chaque $a \in A$, tel que si un autre objet X est aussi munit de telles flèches, alors il existe une unique $\phi : X \to A$ factorisant chacune des flèches. Le *coproduit* est définit dualement: des flèches $a \to \bigvee A$.

On voit que, chez les posets, $\bigwedge A$ est nul autre que $\inf(A)$ et $\bigvee A$ est $\sup(A)$! On note aussi le cas spécial des produits binaires. En fait, un produit est un cas particulier de limite; or dans un poset toute limite est un produit!

3 Frames et locales

Nous avons maintenant une meilleure idée comment étendre les définitions. Rappelons-nous d'abord:

Définition 3.1. Une *topologie* sur un ensemble X est une collection de sous-ensembles $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

1. X et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{O}(X)$
2. Si $A \subset \mathcal{O}(X)$, alors $\bigcup A \in \mathcal{O}(X)$ (unions arbitraires)
3. Si $U, V \in \mathcal{O}(X)$, alors $U \cap V \in \mathcal{O}(X)$ (intersections binaires)

et nous traduirons cela comme

Définition 3.2. Un *frame* est un poset P avec tous les coproduits et avec produits finis, tels que

$$x \wedge (\bigvee_i y_i) = \bigvee_i (x \wedge y_i);$$

un morphisme de frames préserve ces choses, et ensemble forment la catégorie **Frm**.

Il s'agit en effet d'une traduction, car X est terminal, et est le produit vide, alors que $\emptyset$ est initial et est le coproduit vide. La dernière propriété (distributivité) est nécessaire afin que ces objets se comportent environ comme des ensembles. Tout frame n'est pas équivalent à un poset d'ouverts. En effet, comme un point d'un espace X est donné par $f : 1 \to X$, un point d'un frame est donné par un morphisme $P \to \mathcal{O}(1)$; il existe cependant des frames qui n'ont pas de points! Mais il s'agit bien d'une correspondence pour les frames ayant *suffisamment de points* (c'est-à-dire que l'on peut distinguer les ouverts par leurs points).

En fait, nous avons pu remarquer qu'un homémorphisme $f : X \to Y$ induit un morphisme de frames $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. On définit alors

Définition 3.3. Un *locale* est un objet de la catégorie $\mathbf{Loc} := \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$,

d'où $\mathcal{O} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ est un foncteur (covariant!).

Il nous reste à définir l'opération d'implication $x \Rightarrow y$ sur les valeurs de vérité. Déjà, nous voudrions avoir que $1 = (x \Rightarrow y)$ si $x \leq y$; puisque 1 est terminal, on peut écrire $1 \leq (x \Rightarrow y)$. Mais il nous faut généraliser encore.

Définition 3.4. Dans une catégorie C munie d'un produit $\times$, et deux objets $x, y \in C$, on appelle *objet exponentiel* un objet y^x tel que

$$C(a \times x, y) \cong C(a, y^x)$$

pour tout autre objet $z \in C$, naturellement en a et en x. Si tous les objets exponentiels existent, on dit que C est *cartésienne*. On appelle *implication* un objet exponentiel dans un poset.

L'objet exponentiel représente les fonctions $x \to y$. En effet, en remplaçant a par 1, on a bien qu'il existe $x \to y$ si et seulement si il existe $1 \to y^x$, un élément de y^x. Cette *adjonction* se traduit chez les poset par

$$a \wedge x \leq y \quad \text{ssi} \quad a \leq (x \Rightarrow y).$$

On définit maintenant la négation $\neg p$ d'une proposition par $p \Rightarrow 0$: si on prend p pour acquis, alors on peut en déduire une fausseté.

Théorème 3.5. *Tout frame admet une opération d'implication.*

L'existence est donné par le théorème d'existence pour les foncteurs adjoints (n'est-ce pas magnifique?); cependant, en déroulant la preuve, nous pouvons le définir explicitement comme

$$(x \Rightarrow y) = \bigvee \{z | z \wedge x \leq y\},$$

et je vous laisse encore vérifier qu'il s'agit bien d'une implication.

Un frame est *booléen* si $\neg\neg p = p$ pour tout p, comme l'est évidemment $\mathcal{O}(1)$, ou $\mathcal{P}(X)$ pour tout ensemble X. Cependant, ce n'est pas le cas pour tous les frames. En effet, on a que pour $u \in \mathcal{O}(X)$, u n'est pas le complément ensembliste, mais plutôt le plus grand ouvert contenu dans ce complément:

$$(u \Rightarrow 0) = \bigvee \{v | v \cap u = \emptyset\},$$

soit $\mathrm{int}(u^c)$. Prenons alors $u = \mathbb{R} \setminus \{x\}$, la droite réelle privée d'un point. Son complément est bien sûr $\{x\}$, dont l'intérieur est vide, d'où $\neg u = \emptyset$. On trouve

$$\neg\neg u = \mathrm{int}(\emptyset^c) = \mathbb{R} \neq u,$$

donc $\mathbb{R}$ n'est pas booléen; nous travaillons ici avec des valeurs de vérité dites *intuitionnistes* (en fait il suffit d'évaluer une logique intuitionniste en $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ pour reconnaître les énoncés valides!).

Dans l'intérêt d'avoir des valeurs de vérité qui se comportent bien, on demanderait à ce que non seulement tous les coproduits existent, mais les produits aussi; on appelle un poset avec tous les produits et coproduits *complet*. Naïvement, on s'attend à ce qu'un frame ne soit pas complet, puisque seules les intersections finies de fermés sont requises d'être fermées.

Théorème 3.6. *Tout frame est complet.*

En effet, il suffit de définir

$$\bigwedge U := \bigvee \{v | v \leq u \text{ pour tout } u \in U\},$$

c'est-à-dire le plus grand ouvert contenu chaque $u \in U$, ce qui dans le cas d'un espace est $\mathrm{int}(\bigcap U)$. On peut maintenant compléter notre table de correspondence:

`vrai`	1	X
`faux`	0	$\emptyset$
et	$\bigwedge I$	$\mathrm{int}(\bigcap I)$
ou	$\bigvee I$	$\bigcup I$
alors	$a \Rightarrow b$	$\bigcup\{c \| c \cap a \subset b\}$

4 Vers les topos

L'ensemble $2 = \{0, 1\}$, en plus d'être les valeurs de vérité classiques, a la propriété très particulière de *classifier* les sous-ensembles; en effet pour chaque sous-ensemble $A \subset X$, nous avons la fonction caractéristique $x_A : X \to 2$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et cette correspondence est bijective et naturelle.

Définition 4.1. Les monorphismes vers un objet c forment un préordre avec $m \leq m'$ si

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, hook, "m"] \arrow[dr] & & c \\ & a' \arrow[ur, hook, "m'"'] & \end{tikzcd} \quad ;$$

le *poset des sous-objets* de c, $\mathrm{Sub}(c)$, est le squelette de ce préordre.

Définition 4.2. Soit une catégorie C. On dit qu'un objet $\Omega \in C$ est un *classificateur de sous-objet* s'il représente le foncteur $\mathrm{Sub}(-) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ associant à un objet l'ensemble de ses sous-objets. Une *valeur de vérité* est un élément $x : 1 \to \Omega$.

Explicitement, nous avons une correspondence

$$C(c, \Omega) \cong \mathrm{Sub}(c)$$

naturelle en c. Nous avons dit plus haut que $C(1, \Omega)$ est l'ensemble des valeurs de vérité de C; or $C(1, \Omega) \cong \mathrm{Sub}(1)$, donc une valeur de vérité est aussi un sous-objet de 1. En effet, dans **Set** on a bien $2 = \mathcal{P}(\{*\})$.

Un *topos* est une généralisation de la catégorie des ensembles; ils sont cartésiens, possèdent un classificateur de sous-objets, un objet terminal et des égalisateurs. On peut les voir comme des univers mathématiques parallèles, puisque tout topos est modèle de la logique intuitionniste d'ordre supérieur. Un exemple de topos est la catégorie $\widehat{P} = \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}$ des *préfaisceaux* sur un poset P. L'intuition est qu'ils représentent des ensembles structurés. Par exemple, on pourrait voir $\widehat{\mathbb{R}}$ comme des ensembles dans le temps, où $\mathbb{R}$ est vu comme un poset avec $\leq$.

Définition 4.3. Soit L un locale. On dit qu'un préfaisceau $F : F^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ est un *faisceau* si, pour tout recouvrement $u = \bigvee_{i \in I} u_i$, le diagramme suivant est un égalisateur

$$F(u) \to \prod_i F(u_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(u_i \wedge u_j);$$

on écrit $\mathrm{Sh}(L)$ la catégorie des faisceaux sur L; si X est un espace topologique, on écrit $\mathrm{Sh}(X) = \mathrm{Sh}(\mathcal{O}(X))$; de façon équivalente,

1. si $f, g \in F(u)$ sont tels que $F(u_i \leq u)(f) = F(u_i \leq u)(g)$ pour tout u_i, alors $f = g$ dans $F(u)$ déjà,

2. si nous avons une collection $s_i \in F(u_i)$ pour tout $i \in I$, et que pour toute paire i, j on a $F(u_i \cap u_j \leq u_i)(s_i) = F(u_i \cap u_j \leq u_j)(s_j)$

où $F(u \leq v) : F(v) \to F(u)$ est l'image du foncteur sur l'inclusion.

Essentiellement, nous pouvons passer de propriétés locales à des propriétés globales. Un example de faisceau serait $F : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{Set}$ associant à $U \subset X$ l'ensemble des fonctions continues sur U, avec les restrictions.

Quel serait le classificateur de sous-objet de ces catégories? Si un tel faisceau $\Omega : P^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ existe, alors en particulier il classifie les sous-objets des foncteurs $P(-, u)$. On aurait alors

$$\mathrm{Sub}(P(-, u)) \cong \widehat{P}(P(-, u), \Omega) \cong \Omega(u)$$

par le lemme de Yoneda. Ainsi le faisceau Ω est donné par

$$\Omega(u) = \{S | \text{S est un sous-faisceau de P(-,u)}\}.$$

Soit P un frame, et soit $u, v \in P$. Un sous-faisceau est en particulier un sous-foncteur, et un sous-foncteur de $1 = P(-, 1)$ est un préfaisceau F tel que si $u \leq v$, alors il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} F(v) \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & F(u) \arrow[dl, hook'] \\ & 1 & \end{tikzcd},$$

ainsi $F(u) = 0$ ou 1, et si $F(u) = 0$, alors $F(v) = 0$ aussi puisque sinon on aurait un morphisme $1 \to 0$. De plus, si $F(u) = 1$, alors par la commutativité du diagramme et que les flèches vers 1 sont des inclusions, on a $F(v) = 1$ aussi. Soit

$$s = \bigvee \{u | F(u) = 1\},$$

alors on a $F = P(-, s)$. En effet, par les remarques ci-haut, on a que $F(v) = 1$ si et seulement si il existe $v \leq u$ tel que $F(u) = 1$, et $u \leq s$ pour chaque tel u. De plus, comme F est un faisceau, on a $F(s) = 1$ par extension. Par conséquent, l'application

$$P \to \mathrm{Sub}(1), \quad u \mapsto P(-, u)$$

est surjective; mais elle est pleinement fidèle par le lemme de Yoneda, elle définit alors un isomorphisme de catégories entre P et $\mathrm{Sub}(1)$. Nous avons démontré

Théorème 4.4. *Soit L un locale. Alors on a*

$$\mathrm{Sh}(L)(1, \Omega) \cong L,$$

c'est-à-dire que les valeurs de vérité de Sh(L) *sont isomorphes à L en tant que frames.*

Soit X un espace topologique. En prenant $\mathrm{Sh}(X)$, on a alors construit un univers mathématique dont les valeurs de vérité ont la forme de X.